

محاسبه شانس زندگی بر اساس جدولهای آمار حیات

مهدی حسنی

گروه ریاضی دانشگاه زنجان
Mehdi.Hassani@znu.ac.ir

ترنس میلز

مرکز خدمات یکپارچه سرطان لادون مالی، بندیکو، استرالیا
Terence Mills, Loddon Mallee Integrated Cancer Service, Bendigo, Australia
T.Mills@latrobe.edu.au

چکیده: جدولهای زندگی شامل اطلاعاتی درباره میزان مرگ یک جامعه در سنین مختلف است. لذا، این جداول می‌توانند سیمای سلامت ملتی را به خوبی نشان داده، و مبنایی برای محاسبه امید به زندگی در آن جامعه باشد. در این نوشتار این جدولها را از دیدگاه ریاضی بررسی کرده، و در خلال این بررسی برخی از مفاهیم اساسی مبحث احتمال را به زبان ساده بیان خواهیم کرد.

1. جدول زندگی چیست؟

جدول 1 حاوی اطلاعاتی از میزان تولد و مرگ در یک جامعه آماری نمونه است. متغیر x نشانگر گروه سنی، نماد $l(x)$ تعداد افراد زنده در سن آغازین هر گروه، و نماد $d(x)$ تعداد افراد فوت شده در آن گروه را نشان می‌دهد.

سن	$l(x)$	$d(x)$
0	100,000	678
10	99,322	314
20	99,008	814
30	98,194	1,098
40	97,096	1,955
50	95,141	4,216
60	90,925	10,187
70	80,738	22,968
80	57,770	37,241
90	20,529	18,880
100	1,649	1,649

جدول 1: یک جدول زندگی مختصر بر اساس اطلاعات مربوط به مردان استرالیایی (برگرفته از [1])

در این جامعه نمونه با 100,000 نفر تازه متولد شروع می‌کنیم. از این تعداد 678 نفر قبل از رسیدن به سن 10 سالگی می‌میرند، و لذا $100,000 - 678 = 99,322$ نفر تا سن ده سالگی زنده می‌مانند. از میان 99,322 نفری که به سن 10

سالگی رسیده‌اند، 314 نفر قبل از رسیدن به 20 سالگی می‌میرند، و لذا $99,322 - 314 = 99,008$ نفر تا 20 سالگی زنده می‌مانند. به همین ترتیب، در سطر آخر ملاحظه می‌کنیم که 1,649 نفر تا سن یکصد سالگی زنده مانده و همگی تا قبل از رسیدن به سن 110 سالگی می‌میرند. عدد آغازین جدول که در اینجا 100,000 نفر است پایه‌ی جدول نامیده می‌شود، و کاملاً دلخواه می‌باشد.

جدول 1 شمایی از یک جدول زندگی را نشان می‌دهد. در عمل، جداول زندگی معمولاً بسیار گسترده‌ترند. به عنوان مثال این جداول اغلب در گروه‌های سنی با تغییرات 1 سال، به جای 10 سال، تنظیم می‌شوند. علاوه بر این، ستونهای متعددی که نشانگر موارد ریزتری هستند در این جداول تنظیم می‌شود. با این حال جدول ساده‌ی ما قابلیت آنرا دارد که برخی از مفاهیم اساسی احتمالات را بر مبنای آن بیان کنیم.

2. مسائل احتمال حیات و مرگ

از آنجائیکه حل مساله راه مناسبی برای آموزش ریاضیات و درک مفاهیم آن است، در این بخش تعدادی مساله محاسبه‌ی احتمال مرگ و میر را مطرح کرده و سعی می‌کنیم این مسائل را بر اساس اطلاعات جدولهای زندگی پاسخ دهیم.

مسائل

1. احتمال آنکه شخصی تا سن 40 سالگی زنده بماند چقدر است؟ (جواب: 0.97096)
2. احتمال آنکه شخصی قبل از سن 80 سالگی بمیرد چقدر است؟ (جواب: 0.4223)
3. احتمال آنکه شخصی که به سن 20 سالگی رسیده است تا 80 سالگی زنده بماند چقدر است؟ (جواب: 0.5835)
4. احتمال آنکه شخصی قبل از سن 10 سالگی بمیرد چقدر است؟ (جواب: 0.00678)
5. احتمال آنکه شخصی که به سن 10 سالگی رسیده است تا قبل از 20 سالگی بمیرد چقدر است؟ (جواب: 0.0032)
6. پاسخ دو سوال اخیر را مقایسه کنید. چرا شانس زنده ماندن شخصی در 10 سال اول زندگی از شانس زنده ماندن در 10 سال دوم کمتر است؟
7. فرض کنید 5 نفر را در نظر گرفته‌ایم. احتمال آنکه همه آنها تا سن 80 سالگی زنده بمانند چقدر است؟ (جواب: 0.0643)
8. فرض کنید 5 نفر را که همگی تا سن 30 سالگی زنده مانده‌اند را در نظر گرفته‌ایم. احتمال آنکه حداقل 3 نفر از آنها تا سن 80 سالگی زنده بمانند چقدر است؟ (جواب: 0.64336)
9. احسان و عرفان برادرند. احسان 20 سال و عرفان 30 سال سن دارند. عرفان صاحب پسری می‌شود. احتمال آنکه هر سه نفر تا زمانی که پسر عرفان 10 ساله می‌شود زنده بمانند چقدر است؟ (جواب: 0.974039)

پاسخها (بر اساس اطلاعات جدول 1)

1. احتمال آنکه شخصی تا سن 40 سالگی زنده بماند برابر است با $97096/100000 = 0.97096$
2. احتمال آنکه شخصی قبل از سن 80 سالگی بمیرد برابر است با $1 - (57770/100000) = 0.4223$
3. احتمال آنکه شخصی که به سن 20 سالگی رسیده است تا 80 سالگی زنده بماند برابر است با $57770/99008 = 0.5835$. توجه کنید که تعداد اعضای جامعه نمونه ما از 100,000 نفر به 99008 کاهش یافته است، زیرا در این مثال افرادی که به سن 20 سالگی رسیده‌اند را در نظر می‌گیریم.
4. احتمال آنکه شخصی قبل از سن 10 سالگی بمیرد برابر است با $678/100000 = 0.00678$
5. احتمال آنکه شخصی که به سن 10 سالگی رسیده است تا قبل از 20 سالگی بمیرد برابر است با $1 - 314/99322 = 0.0032$

6. پاسخهای مسائل 4 و 5 می‌گویند که احتمال مرگ و میر در 10 سال نخست زندگی افراد حدوداً 2 برابر احتمال مرگ و میر در 10 سال دوم است. لذا خطر مرگ کودکان کم سن بیشتر از کودکان رشد یافته است.

7. احتمال آنکه 5 نفر تا سن 80 سالگی زنده بمانند برابر است با $(0.57770)^5 = 0.0643$. در این راه حل فرض بر این است که مرگ این افراد به همدیگر وابستگی ندارد.

8. این مساله کاربردی از توزیع دو جمله‌ای است. پاسخ مساله عبارتست از

$$C(5,3)*(0.5777)^3*(0.4223)^2 + C(5,4)*(0.5777)^4*(0.4223)^1 + C(5,5)*(0.5777)^5*(0.4223)^0 = 0.64336$$

9. احتمال آنکه احسان، عرفان و پسرش هر سه تا زمانی که پسر عرفان 10 ساله می‌شود زنده بمانند برابر است $(99322/100000)*(98194/99008)*(97096/98194) = 0.974039$

3. امید به زندگی

امید به زندگی یک جمعیت متوسط سالهای عمر افراد از بدو تولد است. در این بخش امید به زندگی جمعیت مربوط به جدول

1 را حساب می‌کنیم. این کار را با همان تعداد 100,000 نفر که تازه متولد شده‌اند و لذا سنشان 0 است، انجام می‌دهیم. از 100,000 نفر 678 نفر در سنین مابین 0 الی 9 می‌میرند. اگر فرض کنیم که این افراد به طور متوسط در سن 5 سالگی مرده‌اند، آنگاه این افراد جمعاً $5*678=3,390$ سال زندگی کرده‌اند.

بر اساس جدول 1، از افراد باقیمانده 314 نفر در سنین مابین 10 الی 19 می‌میرند. اگر فرض کنیم که این افراد به طور متوسط در سن 15 سالگی مرده‌اند، آنگاه این افراد جمعاً $15*314=4,710$ سال زندگی کرده‌اند.

این روند را در جدول 2 برای تمام رده‌های سنی جدول انجام می‌دهیم تا به رده سنی 100 الی 109 سال برسیم. مشاهده می‌کنیم که 1649 نفر در این رده سنی می‌میرند. اگر متوسط سن مرگ در این گروه را 105 سال بگیریم، آنگاه این افراد جمعاً $105*1649=173,145$ سال زندگی کرده‌اند.

age (x)	l(x)	d(x)	v(x) سن متوسط =	d(x)*v(x)
0	100,000	678	5	3,390
10	99,322	314	15	4,710
20	99,008	814	25	20,350
30	98,194	1,098	35	38,430
40	97,096	1,955	45	87,975
50	95,141	4,216	55	231,880
60	90,925	10,187	65	662,155
70	80,738	22,968	75	1,722,600
80	57,770	37,241	85	3,165,485
90	20,529	18,880	95	1,793,600
100	1,649	1,649	105	173,145
جمع کل		100,000		7,903,720
امید به زندگی				79.04

جدول 2: محاسبه امید به زندگی اساس اطلاعات جدول 1

حال مجموع سالهایی که تمام جمعیت 100,000 نفر زندگی کرده‌اند برابر 7,903,720 سال است. با تقسیم این عدد بر تعداد کل، یعنی 100,000 به متوسط تقریبی 79 سال برای هر نفر می‌رسیم، و این عدد امید به زندگی در جامعه آماری فوق را نشان می‌دهد. اگر کارمان را با جدولهای گسترده‌تری انجام می‌دادیم، به تقریب بهتری دست می‌یافتیم.

4. نتیجه‌گیری

این مقاله برای معرفی مقدماتی جداول زندگی و کاربردهای آنها در بررسی ساختار جمعیت یک جامعه آماری نوشته شده است. هرچند ما در اینجا جدولی مختصر را در نظر گرفتیم، اما جدولهای بسیار مبسوطتری در این زمینه تهیه شده است. در این مقاله مفاهیم مقدماتی احتمال را بر اساس اطلاعات این جدولها متذکر شدیم، و دیدیم که چگونه می‌توان با این قبیل جدولها و مشابه آنها در دیگر زمینه‌ها کار کرد. کتابهای [7]-[2] در لیست منابع نشان می‌دهند که کارهای آماری بسیاری با این قبیل جدولها می‌توان انجام داد.

لیست مراجع

- [1] Commonwealth of Australia, *Australian Life Tables 2005-2007*. Canberra, 2009.
http://www.aga.gov.au/publications/life_tables_2005-07/downloads/australian_life_tables_2005-07.pdf
- [2] C.L. Chiang, *Introduction to stochastic processes in biostatistics*. New York: John Wiley, 1968.
- [3] C.L. Chiang, *Life table and its applications*. Malabar, FL: Robert E. Krieger, 1984.
- [4] N. Keyfitz, *Applied mathematical demography*. New York: Springer-Verlag, 1977.
- [5] N. Keyfitz and J. A. Beekman, *Demography through problems*. New York: Springer-Verlag, 1984.
- [6] K. Namboodiri and C. M. Suchindran, *Life table techniques and their applications*. Orlando: Academic Press, 1987.
- [7] J.H. Pollard, *Mathematical models for the growth of human populations*. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.